Образы градуированных многочленов в кольцах матриц над конечными групповыми алгебрами

В. В. Кулямин

1. Введение

В этой работе изучаются образы многочленов от некоммутирующих переменных в кольце матриц над конечной коммутативной групповой алгеброй, рассматриваемой как градуированное кольцо. Основная её цель — попытаться перенести на градуированный случай следующее утверждение (C.-L. Chuang, [1]):

Теорема 1. Пусть $R = M_n(\mathbb{F})$ — кольцо матриц размера $n \times n$ над конечным полем $\mathbb{F}$. Множество $A \subseteq R$ является образом многочлена от некоммутирующих переменных с нулевым свободным членом тогда и только тогда, когда $0 \in A$ и $\alpha A \alpha^{-1} \subseteq A$ для всех обратимых матриц α из R.

В качестве основного кольца у нас будет выступать конечная коммутативная групповая алгебра с естественной градуировкой — такие градуированные кольца ближе всего по своим свойствам к полям. Введём ряд понятий, которые потребуются для формулировки основного результата данной работы.

Для кольца $\mathbb{K}$, градуированного по полугруппе G, рассмотрим *алгебру G-градуированных многочленов* над $\mathbb{K}$ — свободную ассоциативную алгебру $\mathbb{K}\{X\}$, порождённую *G-градуированным множеством* X, т.е. множеством, представленным в виде дизъюнктного объединения

$$X = \bigsqcup_{g \in G} X_g$$

компонент X_g, каждая из которых является счётным множеством $X_g =$

$\{x_{g0}, x_{g1}, \ldots\}$. Далее мы будем обозначать эту алгебру как $\mathcal{K}^G$, а подалгебру многочленов с нулевым свободным членом в ней как $\mathcal{K}_0^G$.

Обозначим также через $Hom_{\mathbb{K}}^G(R, S)$ множество гомоморфизмов G-градуированной $\mathbb{K}$-алгебры R в G-градуированную $\mathbb{K}$-алгебру S, сохраняющих градуировку, то есть, удовлетворяющих условию

$$\forall g \in G \quad \varphi(R_g) \subseteq S_g.$$

Будем называть их далее *G-градуированными гомоморфизмами.*

Образом многочлена f из $\mathcal{K}^G$ в G-градуированной алгебре R назовём следующее множество

$$Im\, f = \{a \in R : \exists \varphi \in Hom_{\mathbb{K}}^G(\mathbb{K}\{X\}, R) \quad \varphi(f) = a\}.$$

Это определение означает, что, при взятии образа градуированного многочлена, мы подставляем в него вместо переменных x_{gi} всевозможные однородные элементы степени g из R.

Далее для $a \in R$ будем обозначать через a_g его однородную компоненту степени g, а для $A \subseteq R$ через A_g — его проекцию на R_g.

Пусть e — единица полугруппы G. Множество матриц A над градуированным по G кольцом $\mathbb{K}$, удовлетворяющее условию $\alpha A \alpha^{-1} \subseteq A$ для всякой обратимой однородной степени e матрицы α, будем называть *самоподобным.*

Теперь сформулируем основной результат этой работы.

Теорема 2. Пусть $R = M_n(\mathbb{K})$ — кольцо матриц размера $n \times n$ над конечной коммутативной групповой алгеброй $\mathbb{K} = \mathbb{F}(G)$ с естественной градуровкой. Однородное множество $A \subseteq R$ является образом G-градуированного многочлена из $\mathcal{K}_0^G$ тогда и только тогда, когда $0 \in A$ и A самоподобно.

2. Доказательство основного результата

Мы всюду будем придерживаться обозначений, введённых в формулировке Теоремы 2.

Очевидно, что однородное множество, являющееся образом градуированного многочлена с нулевым свободным членом содержит 0. Пусть также $a = f(a_1, \ldots, a_m)$, где $a, a_1, \ldots, a_m \in R$ и $\alpha \in R$ — однородная обратимая матрица. Тогда

$$\alpha a \alpha^{-1} = \alpha f(a_1, \ldots, a_m) \alpha^{-1} = f(\alpha a_1 \alpha^{-1}, \ldots, \alpha a_m \alpha^{-1}).$$

Последнее выражение является матрицей из $Im\, f$, поскольку степень однородности $\alpha a_i \alpha^{-1}$ совпадает со степенью однородности a_i. Таким образом, необходимость в Теореме 2 доказана.

Далее нам понадобится следующее утверждение, которое легко извлечь из доказательства Теоремы 1 в [1].

Лемма 3. Для самоподобного множества A матриц над конечным полем существует многочлен от некоммутирующих переменных $\chi_A(x, x_1, \dots, x_m)$, принимающий только значения 0 и 1, и такой, что

$$a \notin A \Rightarrow \forall a_1, \dots, a_m \in R \quad \chi_A(a, a_1, \dots, a_m) = 0;$$

$$a \in A \Rightarrow \exists a_1, \dots, a_m \in R \quad \chi_A(a, a_1, \dots, a_m) = 1.$$

Многочлен, обладающий описанными свойствами будем называть *индикатором* множества A.

Под классом подобия в R будем понимать минимальное непустое самоподобное множество. Назовём класс подобия матриц $C \subseteq R$ *разложимым,* если он является суммой своих проекций на однородные компоненты R, т.е., если $G = \{g_1, \dots, g_k\}$, и $a_1, \dots, a_k \in C$, то $\sum_{g \in G} a_{i g_i} \in C$. Очевидно, что класс подобия, отоящий из однородных матриц одной степени однородности является разложимым — все его проекции, кроме одной, равны $\{0\}$.

Лемма 4. Всякий разложимый класс подобия матриц C над конечной коммутативной групповой алгеброй $\mathbb{K} = \mathbb{F}(G)$ является образом градуированного многочлена из $\mathcal{K}_0^G$.

Доказательство: Рассмотрим множество однородных компонент степени g_i элементов класса C. Легко показать, что оно представляет собой некоторое самоподобное множество матриц $C_{(g_i)}$ над $\mathbb{F}$, умноженное на g_i. По Лемме 3 $C_{(g_i)}$ имеет индикатор $\chi_i(x_i, x_{i1}, \dots, x_{im_i})$ в кольце матриц над $\mathbb{F}$. Рассмотрим многочлен

$$h(y_1, \dots y_k, x_{11}, \dots, x_{km_k}) = (g_1 y_1 + \dots + g_k y_k) \prod_{i \leq k} \chi_i(y_i, x_{i1}, \dots, x_{im_i}),$$

в котором степень однородности переменных $y_i, x_{i1}, \dots, x_{im_i}$ равна e — единице G. Ясно, что он лежит в $\mathcal{K}_0^G$. Очевидно также, что если значение y_i для какого-нибудь i не лежит в $C_{(g_i)}$, то h принимает значение 0, если же для всякого i значение y_i — элемент $C_{(g_i)}$, то значение h равно сумме произведений их значений на соответствующие элементы группы

G, и, следовательно, лежит в C. Беря в качестве $g_i y_i$ однородные компоненты произвольного элемента C, легко показать, что он лежит в образе многочлена h.□

Лемма 5. Если $E(z_1, \ldots, z_l)$ — градуированный многочлен в R, принимающий только значения 0 и 1 но не являющийся тождеством, то образом многочлена

$$f(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_s, z_1, \ldots, z_l) = E(z_1, \ldots, z_l)h(x_1, \ldots, x_m)+$$

$$+(1 - E(z_1, \ldots, z_l))p(y_1, \ldots, y_s)$$

является объединение образов h и p, объединённое с $\{0\}$.

Доказательство этого утверждения очевидно. Соединяя его с уже отмеченными фактами, легко видеть, что любое содержащее 0 объединение разложимых классов подобия матриц над конечной коммутативной групповой алгеброй является образом градуированного многочлена с нулевым свободным членом, в часности таковыми являются однородные самоподобные содержащие 0 подмножества, что и завершает доказательство Теоремы 2.

Литература

[1] C.-L. Chuang. On ranges of polinomials in finite matrix rings. Proc. of American Math. Society, v. 110(2), October 1990, p. 293–302