Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.552.18, 512.552.332, 512.624.2

Кулямин Виктор Вячеславович

Об образах полиномиальных отображений в конечных кольцах матриц

Специальность 01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2000

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель	—	доктор физико-математических наук профессор А. В. Михалёв
Официальные оппоненты	—	доктор физико-математических наук профессор А. А. Нечаев кандидат физико-математических наук А. А. Золотых
Ведущая организация	—	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится «____» ________________ 2000 г. в 16 ч. 15 мин. на заседании диссертационного совета Д.053.05.05 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119899, ГСП, Москва, Воробьёвы горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан «____» ________________ 2000 г.

Учёный секретарь диссертационного
совета Д.053.05.05 при МГУ
доктор физико-математических наук
профессор В. Н. Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Практически с самого зарождения теории колец большое значение для неё имело изучение свойств специфических многочленов. Роль, которую играет наличие таких многочленов для определения строения кольца, наиболее отчётливо была осознана в конце сороковых — начале пятидесятых годов этого века. Тогда, благодаря работам Капланского[1], Амицура[2,3,4], Левицкого[5], их совместным работам[6,7] тождества, то есть многочлены, принимающие в кольце только значение 0, стали одним из основных инструментов исследований в данной области.

В связи с этим алгебры, обладающие нетривиальными тождествами, — так называемые PI-алгебры — стали важным объектом изучения и рассматривались как естественное обобщение коммутативных алгебр, удобное для распространения результатов структурной теории. Основные результаты о PI-алгебрах можно найти в классических моно-

[1] Kaplansky I. Rings with a Polynomial Identity, Bull. Amer. Math. Soc., 1948, No. 54, p. 575–580.

[2] Amitsur S. Nil PI-Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 1951, No. 2, p. 538–540.

[3] Amitsur S. The Identities of PI-Rings, Proc. Amer. Math. Soc., 1953, No. 4, p. 27–34.

[4] Amitsur S. On Rings with Identities, J. London Math. Soc., 1955, No. 30, p. 464–470.

[5] Levitzki J. A Theorem on Polynomial Identities, Proc. Amer. Math. Soc., 1950, No. 1, p. 334–341.

[6] Amitsur S., Levitzki J. Minimal Identities for Algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 1950, No. 1, p. 449–463.

[7] Amitsur S., Levitzki J. Remarks on Minimal Identities for Algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 1951, No. 2, p. 320–327.

графиях Прочези[8], Джекобсона[9] и Роуэна[10].

Эти исследования показали, в частности, что важную роль в определении свойств алгебры, помимо тождеств, играют так называемые центральные многочлены — не являющиеся тождествами многочлены, образ которых целиком содержится в центре алгебры. Проблема существования центральных многочленов в наиболее важном случае, в полных матричных алгебрах, была поставлена Капланским ещё в 1956 году среди других проблем теории колец[11].

В случае конечности основного поля проблема Капланского была решена Латышевым и Шмелькиным[12] в 1969 году. Сам Капланский[13] упоминал о других частных её решениях. Полное положительное решение её было получено в 1971 году независимо Размысловым[14] и Форманеком[15], причём конструкция Размыслова с небольшими изменениями даёт центральный многочлен для полной матричной алгебры над произвольным коммутативным кольцом с единицей.

По-видимому, именно обсуждение различных аспектов проблемы существования центрального многочлена, побудило Капланского поставить следующую проблему: всегда ли образ некоммутативного полилинейного многочлена в пол-

[8]Procesi C. Rings with Polynomial Identities, Marcel Dekker, New York, 1973.

[9]Jacobson N. *P.I.*-Algebras, An Introduction, Lecture Notes in Mathematics, vol. 441. Springen-Verlag, Berlin — Heidelberg — New York, 1975.

[10]Rowen L. H. Polynomial identities in ring theory. Academic Press, New York, 1980.

[11]Kaplansky I. Problems in the theory of rings. In report of a conference on linear algebras. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Cons. publ. 502, 1957, p. 1–3.

[12]Латышев В. Н., Шмелькин А. Л. Об одной проблеме Капланского. Алгебра и Логика, 1969, т. 8, № 4, с. 447–448.

[13]Kaplansky I. "Problems in the theory of rings" revisited. Amer. Math. Monthly, 1970, No. 77, p. 445–454.

[14]Размыслов Ю. П. Об одной проблеме Капланского. Изв. АН СССР, Сер. мат. 1973, т. 37, № 3, с. 483–501.

[15]Formanek E. Central polynomials for matrix rings, Jour. of Algebra, 1972, No. 23, p. 129–133.

ной матричной алгебре M над полем нулевой характеристики является линейным подпространством в M. В некоторых частных случаях, например, для многочленов от двух переменных, это, конечно же, так. Ответ на этот вопрос в общем случае до сих пор не известен.

Второй раз тема описания свойств образов многочленов возникла в работе Чуанга[16], появившейся в 1990 году. Пытаясь ответить на вопрос, поставленный Капланским, он получил характеризацию образов произвольных некоммутативных многочленов в полных матричных алгебрах над конечными полями. Подмножество A такой алгебры является образом многочлена с коэффициентами из основного поля тогда и только тогда, когда оно содержит скалярную матрицу и самоподобно, то есть $\alpha A \alpha^{-1} \subseteq A$ для всякой обратимой матрицы α.

В настоящей работе исследуются свойства образов многочленов в полных матричных алгебрах над конечными коммутативными кольцами. В первую очередь нас будут интересовать кольца наиболее близкие к полям по своим свойствам — так называемые кольца Галуа.

Кольцо Галуа — это конечное коммутативное локальное кольцо $\mathbb{K}$ главных идеалов с единицей, наибольший идеал которого $J(\mathbb{K})$ порождён характеристикой поля вычетов $\mathbb{K}/J(\mathbb{K})$. Такие кольца впервые были рассмотрены в работе Раджавендрана[17]. Они являются естественным обобщением колец вычетов по модулю, равному степени простого числа, и находятся с этими кольцами вычетов в таком же отношении, как поля Галуа с полями вычетов $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Многие свойства колец Галуа были исследованы Нечаевым в ряде

[16] Chuang C.-L. On ranges of polinomials in finite matrix rings. Proc. Amer. Math. Soc., October 1990, vol. 110(2), p. 293–302

[17] Radhgavendran R. Finite associative rings, Compositio math., 1969, vol. 21, No. 2, p. 195–229.

его статей[18,19,20]. Изложение общих результатов, касающихся локальных колец и колец главных идеалов можно найти в книгах Нагаты[21] и Ятегаонкара[22].

Цель работы

Целью данной работы является исследование свойств образов многочленов в конечных алгебрах и распространение характеризации образов некоммутативных многочленов в полных матричных алгебрах, полученной Чуангом, на случай основного кольца, не являющегося полем.

Методы исследования

В работе используются методы и результаты общей теории колец, теории PI-алгебр, арифметические свойства конечных полей и колец Галуа.

Научная новизна работы

Основные результаты данной работы:

- Сформулирован ряд условий на подмножество произвольной алгебры над коммутативным кольцом, необходимых для того, чтобы это подмножество было образом некоммутативного многочлена с коэффициентами в этом кольце;

[18]Нечаев А. А. О строении конечных коммутативных колец с единицей. Мат. заметки, 1971, т. 10, № 6, с. 679–688.

[19]Нечаев А. А. Конечные кольца главных идеалов. Мат. сборник, 1973, т. 91, № 3, с. 350–366.

[20]Нечаев А. А. О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом. Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, с. 81–101.

[21]Nagata M. Local rings, Interscience tracts in pure and applied math., 13. New York, 1962.

[22]Jategaonkar A. V. Left principal ideal rings, Lecture Notes in math., vol. 123, 1970.

- Доказано, что упомянутые в предыдущем пункте условия на подмножество алгебры являются достаточными в том случае, если алгебра является конечной прямой суммой полных матричных алгебр над конечным полем, полной алгеброй матриц размера 2×2 над кольцом Галуа с радикалом степени нильпотентности 2 или над $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$;
- Получен аналогичный результат для градуированного случая — сформулированы условия на однородное подмножество полной матричной алгебры над конечной коммутативной полугрупповой алгеброй над полем, необходимые и достаточные для того, чтобы это подмножество было образом градуированного многочлена с коэффициентами из основного поля.

Все полученные результаты являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы при исследовании ряда вопросов теории колец.

Апробация

Результаты работы неоднократно обсуждались на семинаре «Кольца и модули» кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ под руководством профессора В. Н. Латышева и профессора А. В. Михалёва. Часть результатов докладывалась на конференции, посвящённой 70-летию кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ в 1999 году.

Публикации

Основные результаты данной диссертации опубликованы в 4-х работах автора, список которых приводится в конце введения.

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, разбитых на параграфы, и списка литературы. Полный объём диссертации — 73 страницы, библиография содержит 35 наименований.

Содержание работы

В первой главе данной работы обсуждаются общие свойства образов полиномиальных отображений в алгебрах над коммутативными кольцами. В первом её параграфе даются базовые определения, и формулируется основное свойство образов таких отображений, состоящее в устойчивости относительно эндоморфизмов алгебры. Дальнейшие исследования посвящены, в основном, выяснению того, в каких алгебрах выполнения этого свойства для произвольного подмножества алгебры достаточно для существования многочлена, образ которого совпадает с этим подмножеством.

Во втором параграфе рассматривается влияние разложимости алгебры в прямую сумму на свойства образов многочленов в ней. Выявляется дополнительное условие, которому удовлетворяют образы многочленов в такой алгебре. Оно состоит в том, что для любых двух центральных ортогональных многочленов e_1 и e_2 образ многочлена A содержит множество e_1A+e_2A. Здесь же доказывается следующая теорема, позволяющая свести исследование вопроса о достаточности устойчивости множества относительно эндоморфизмов для того, чтобы оно было образом многочлена, к изучению алгебр над неразложимыми в прямую сумму кольцами.

Теорема 1. *Если R является алгеброй над кольцом $\mathbb{K} = \mathbb{K}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}_n$ и для всякого $i \in [1,n]$ в алгебре ${}_{\mathbb{K}_i}(\mathbb{K}_i R)$ любое подмножество, устойчивое относительно эндоморфизмов этой алгебры является образом многочлена с коэффициентами из $\mathbb{K}_i$ и нулевым свободным членом, то всякое подмножество R, устойчивое относительно её эндоморфизмов и удовлетворяющее приведённому выше условию, также является образом некоторого многочлена с коэффициентами из $\mathbb{K}$ и нулевым свободным членом.*

В третьем параграфе приводится ряд примеров алгебр, в которых все устойчивые относительно эндоморфизмов подмножества являются образами многочленов. Во всех этих примерах соответствующие алгебры конечны. Несколько контрпримеров, также приведённых в третьем параграфе, демонстрируют, что в случае бесконечных алгебр требуются какие-то дополнительные ограничения.

Тут же доказано утверждение, показывающее что в алгебре, имеющей центральный многочлен, принимающий значение 1, объединение образов двух многочленов также является образом многочлена. Это даёт следующий метод для доказательства достаточности устойчивости подмножества алгебры относительно эндоморфизмов для того, чтобы оно являлось образом многочлена: сперва рассматриваем минимальные устойчивые подмножества и находим многочлены, чьими образами они являются, затем, используя конечность алгебры и сформулированное утверждение, получаем, что все устойчивые подмножества являются образами многочленов.

Во второй главе исследуются свойства образов многочленов в градуированных алгебрах. Первый её параграф содержит определения алгебры градуированных многочленов и образа градуированного многочлена, а также доказательство аналогичного неградуированному случаю свойства образов многочленов — образы градуированных многочленов устойчивы относительно эндоморфизмов, сохраняющих градуировку.

Второй параграф второй главы посвящён, в основном, доказательству следующего утверждения, являющегося некоторым обобщением результата Чуанга на случай алгебр матриц над градуированным кольцом.

Теорема 2. *Пусть G — конечная коммутативная полугруппа с единицей, $\mathbb{K} = \mathbb{F}(G)$ — конечная полугрупповая алгебра над полем, $R = M_m(\mathbb{K})$ — кольцо матриц размера $m \times m$ над $\mathbb{K}$. Тогда на $\mathbb{K}$ определена естественная градуировка по G, которая переносится и на R. Однородное по этой градуировке множество $A \subseteq R$ является образом G-градуированного многочлена с нулевым свободным членом тогда и только тогда, когда $0 \in A$ и A самоподобно, то есть, переводится в себя всяким собственным автоморфизмом, соответствующим однородной обратимой матрице.*

Для доказательства используется описанный выше подход, при котором строятся многочлены, чьи образы совпадают с минимальными однородными содержащими 0 множествами — при этом используется результат Чуанга.

Третья глава данной работы посвящена распространению характеризации образов многочленов в полных матричных алгебрах над конечными полями, полученной Чуангом, на матричные алгебры над кольцами Галуа. В первом её параграфе приводятся определение кольца Галуа и основные свойства таких колец.

Дальнейшее содержание этой главы составляет доказательство того, что все самоподобные и содержащие 0 подмножества полной алгебры матриц размера 2×2 над кольцом Галуа, радикал которого имеет степень нильпотентности 2, или же которое изоморфно $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, являются образами многочленов с коэффициентами из данного кольца и нулевым свободным членом. Доказательство это следует описанному выше пути — мы пытаемся сперва получить многочлены, образами которых являются минимальные самоподобные множества, или, по-другому, классы подобия.

В качестве вспомогательного средства для получения многочленов с определёнными подмножествами в качестве образов используются индикаторы. *Индикатором* подмножества A алгебры ${}_{\mathbb{K}}R$ называется многочлен $\chi(x, x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из $\mathbb{K}$, принимающий в R только значения 0 и 1, причём

$$a \notin A \Rightarrow \forall a_1, \ldots, a_n \in R \quad \chi_A(a, a_1, \ldots, a_n) = 0;$$

$$a \in A \Rightarrow \exists a_1, \ldots, a_n \in R \quad \chi_A(a, a_1, \ldots, a_n) = 1.$$

В работе Чуанга основной результат получен, фактически, как следствие следующего утверждения.

Лемма 3. *Всякое самоподобное множество $A \subseteq R = M_m(\mathbb{K})$ матриц над конечным полем обладает индикатором.*

Можно отметить как очевидный факт то, что всякое обладающее индикатором и содержащее 0 подмножество алгебры является образом многочлена. Если $\chi(x, x_1, \ldots, x_n)$ — его индикатор, в качестве такого многочлена подходит $x\chi(x, x_1, \ldots, x_n)$.

Во втором параграфе третей главы формулируется и доказывается критерий существования индикатора для подмножества полной матричной алгебры над кольцом Галуа.

Оказывается, для такого подмножества индикатор существует в точности тогда, когда оно самоподобно и замкнуто по модулю радикала. Доказательство этого основано на сформулированной лемме.

Третий параграф содержит несколько вспомогательных результатов о подобии матриц размера 2×2 над кольцом Галуа. Здесь приводится классификация классов подобия таких матриц, полученная Нечаевым[23] и на её основе доказывается, что все матрицы из минимального самоподобного и замкнутого по модулю радикала множества после возведения в некоторую степень становятся либо скалярами по модулю радикала, либо образуют один класс подобия. В качестве подходящего показателя степени можно взять p^{n-1}, где $p = char(\mathbb{K}/J(\mathbb{K}))$ — характеристика поля вычетов по радикалу, а n обозначает степень нильпотентности радикала $J(\mathbb{K})$.

В четвёртом параграфе формулируются условия, при которых возведение матрицы 2×2 над кольцом Галуа в степень p^{n-1} даёт скалярную по модулю радикала матрицу.

Основное содержание пятого параграфа составляют процедуры построения многочленов, образы которых совпадают с классами подобия, дополненными 0. При этом, во-первых, используются результаты трёх предыдущих параграфов, чтобы для каждого класса подобия матриц, p^{n-1}-ая степень которых нескалярна по модулю радикала, получить многочлен, чей образ равен этому классу в объединении с 0. Затем, при помощи некоторых специальных конструкций, вопрос о получении многочленов, образы которых давали бы все классы подобия, сводится, при некоторых ограничениях, к получению многочленов с образами, равными нескалярным по модулю радикала классам подобия матриц с нулевым следом,

[23] Нечаев А. А. О подобии матриц над коммутативным локальным артиновым кольцом. Труды сем. им. И. Г. Петровского, 1983, вып. 9, с. 81–101.

дополненным 0.

В шестом параграфе третьей главы полученные ранее результаты используются для доказательства теоремы, распространяющей результат Чуанга на алгебры матриц размера 2×2 над некоторыми кольцами Галуа.

Теорема 4. *Пусть $R = M_2(\mathbb{K})$ есть полная алгебра матриц размера 2×2 над кольцом Галуа $\mathbb{K}$, радикал которого имеет степень нильпотентности 2, или же которое само совпадает с $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Тогда образами многочленов с коэффициентами из $\mathbb{K}$ нулевым свободным членом в R являются самоподобные и содержащие 0 подмножества, и только они.*

Пока остаётся нерешённым вопрос о характеризации образов многочленов для матриц размера 2×2 над кольцами Галуа с радикалом, степень нильпотентности которого больше двух и для матриц большего размера. Однако ряд промежуточных результатов, полученных в данной работе, позволяют сформулировать алгоритм, способный проверить справедливость характеризации Чуанга для матриц размера 2×2 над одним из колец $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, где p — простое число. Этот алгоритм приведён в последнем параграфе данной работы. К сожалению, автору не удалось реализовать его достаточно эффективно для того, чтобы на доступной вычислительной технике получить окончательный ответ для одного из колец, для которых этот ответ ещё не получен теоретически.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук профессору А. В. Михалёву за постановку задач, постоянную поддержку и внимание к работе. Автор также признателен кандидату физико-математических наук доценту В. Т. Маркову и В. В. Острику за ряд ценных замечаний и полезные обсуждения.

Публикации автора по теме диссертации

[1] Кулямин В. В. Об образах многочленов в конечных кольцах матриц. Фунд. и прикл. математика 1997, т. 3, вып. 2, с. 469–485.

[2] Кулямин В. В. Об образах многочленов в кольце $M_2(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})$. Фунд. и прикл. математика 2000, т. 6, вып. 1, с. 275–280.

[3] Кулямин В. В. Образы градуированных многочленов в кольцах матриц над конечными групповыми алгебрами. УМН 2000, т. 55, вып. 2, с. 141–145.

[4] Кулямин В. В. Образы многочленов в кольцах матриц над кольцами Галуа. Международный алгебраический семинар, Москва, 1999, с. 36–37.